〔1〕

Ⅰ.

問 1

$$\frac{v_0{}^2}{2g}$$

解説

最高点の座標を $y_{\max}$ とすると，

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = mgy_{\max}$$

$$\therefore y_{\max} = \frac{v_0{}^2}{2g}$$

補足

小物体の運動方向に対する仕事は重力（保存力）の斜面に沿った成分のみであり，

垂直抗力（非保存力）の仕事は 0 である。

よって，力学的エネルギー保存則が成り立つ。

これを確かめてみよう。

小物体は重力の斜面に沿った外力を受けながらその運動エネルギーを失っていく。

尚，小物体に働く垂直抗力の向きと小物体の運動方向のなす角は 90° だから，

垂直抗力は小物体に対し仕事をしない。

すなわち小物体の運動エネルギー変化に垂直抗力は寄与しない。

そこで，小物体が最高点に達するまでに，

すなわち小物体の運動エネルギーが 0 になるまでに，

小物体が斜面を上った距離を $l_{\max}$ とすると，

重力の斜面にそった成分が小物体に対してした仕事は，

運動の向きと外力の向きのなす角が 180° だから，

$$mg\sin\theta \cdot l_{\max} \cdot \cos 180° = -mgl_{\max}\sin\theta$$

よって，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 - mgl_{\max}\sin\theta = 0$$

これと，最高点の座標を $y_{\max}$ とすると， $y_{\max} = l_{\max}\sin\theta$ より，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 - mgy_{\max} = 0 \quad \therefore y_{\max} = \frac{v_0{}^2}{2g}$$

Ⅱ.

問 2

$m(g\cos\theta - a\sin\theta)$

解説

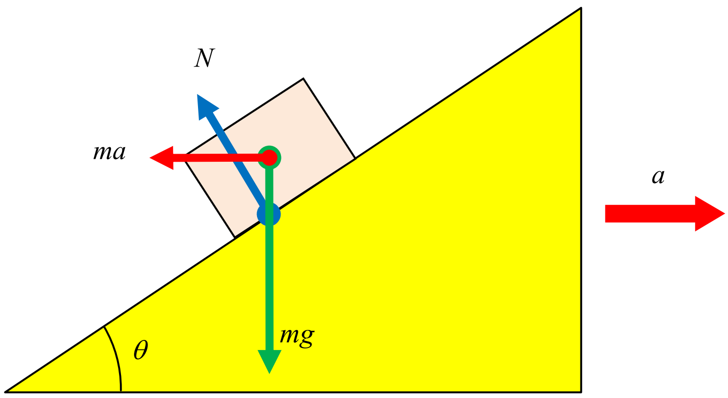
台 B 上の観測者から見ると，小物体は，斜面からの垂直抗力 N，小物体の重力 mg，水平左向きの慣性力 ma を受け，台 B の斜面と平行な向きに運動する。

したがって，小物体は台 B の斜面に垂直な方向に対しては静止している。

つまり，小物体が受ける外力の斜面に垂直な成分はつり合っている。

よって，そのつり合いの式 $N + ma\sin\theta = mg\cos\theta$ より，

$N = mg\cos\theta - ma\sin\theta = m(g\cos\theta - a\sin\theta)$

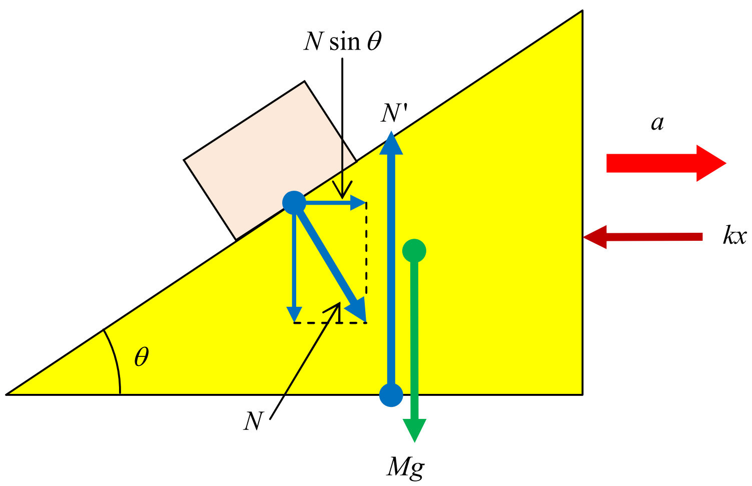


問 3

$$a_0 = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \quad b_0 = \frac{k}{M + m\sin^2\theta}$$

解説

台 B が受ける外力は，台 B の重力，小物体からの垂直抗力，ばねから受ける弾性力，台 A からの垂直抗力である。



台 B は水平方向に運動するから，
その運動方程式は，

$$
\begin{aligned}
Ma &= N\sin\theta - kx \\
&= m(g\cos\theta - a\sin\theta)\sin\theta - kx \\
&= mg\cos\theta\sin\theta - ma\sin^2\theta - kx
\end{aligned}
$$

$$\therefore (M + m\sin^2\theta)a = mg\cos\theta\sin\theta - kx$$

$$\therefore a = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g - \frac{k}{M + m\sin^2\theta}x$$

補足

問 2 の $N = m(g\cos\theta - a\sin\theta)$

台 B から見た小物体の運動は台 B の斜面に束縛された運動に過ぎないが，
台 A の観測者から見た小物体の運動は台 B が運動しているため，
台 B の観測者から見た運動より複雑である。
したがって，台 A の観測者の立場から垂直抗力 N を求めるのは大変である。
そこで，実在の力の大きさは観測者の立場が変わっても同じであるから，
あらかじめ台 B の観測者の立場から垂直抗力 N を求めさせ，
問 3 の問題を正解しやすくしたと思われる。

教訓

物体に働く力を求める場合，より簡単に求められる観測者の立場からその力を求める。

問 4

$$\frac{a_0}{b_0}$$

問 5

$$\sqrt{b_0}$$

解説

$a = a_0 - b_0 x$ より， $Ma = Ma_0 - Mb_0 x$

$$\therefore Ma = -Mb_0\left(x - \frac{a_0}{b_0}\right)$$

これより，台 B は位置 x の 1 次関数で表される外力 $F = -Mb_0\left(x - \frac{a_0}{b_0}\right)$ を受ける運動，

すなわち単振動運動であることがわかる。

$F = -Mb_0\left(x - \frac{a_0}{b_0}\right)$ より，

つり合いの位置，すなわち振動中心の位置は， $F = 0$ より $x = \frac{a_0}{b_0}$

単振動の開始位置は $x=0$ の位置だから，振動開始位置と振動中心の距離，

つまり振幅は $\dfrac{a_0}{b_0}-0=\dfrac{a_0}{b_0}$

また，

単振動の外力 F の一般形を $F=-KX$，単振動する物体の質量を M とすると，

振動周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K}}$ より，$\omega=\sqrt{\dfrac{K}{M}}$

$F=-Mb_0\left(x-\dfrac{a_0}{b_0}\right)$ において，Mb_0 が K に相当するから，

$\omega=\sqrt{\dfrac{Mb_0}{M}}=\sqrt{b_0}$

角振動数の別解

振幅を A，角振動数を ω，初期位相を δ，台 B の振動中心からの変位を X とすると，

$X=A\sin(\omega t+\delta)$ （または $X=A\cos(\omega t+\phi)$ ϕ は初期位相）と表される。

よって，

単振動中の台 B の速度 $v=\dfrac{dX}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\delta)$

単振動中の物体の加速度 $a=\dfrac{d^2X}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}=-\omega^2A\sin(\omega t+\delta)=-\omega^2X$

よって，$a=-\omega^2X$ ・・・①

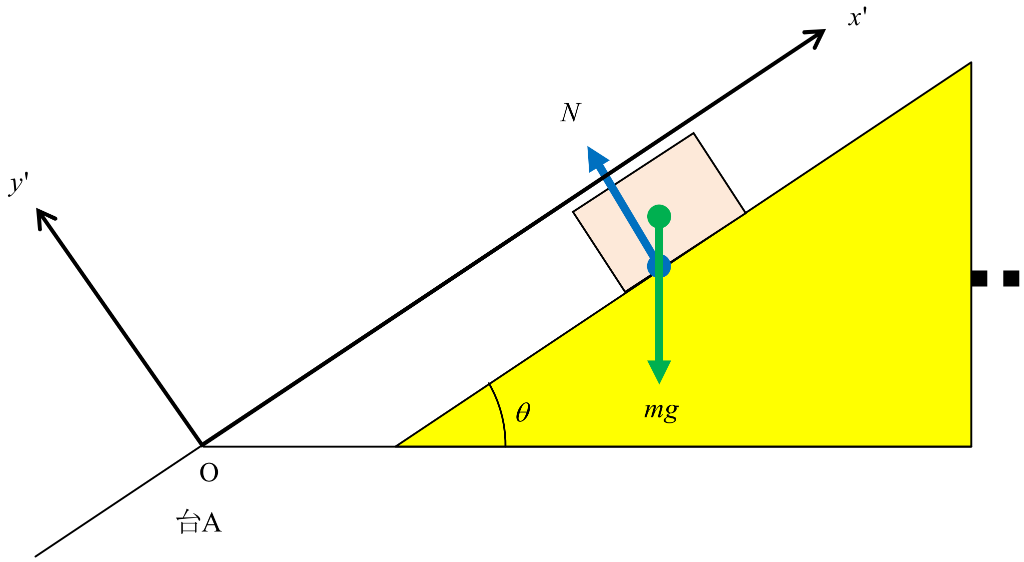
一方，$a=a_0-b_0x$ より $a=-b_0(x-a_0)$ ・・・②

①，②より，

$X=x-\dfrac{a_0}{b_0}$，$\omega^2=b_0$

$\therefore \omega=\sqrt{b_0}$

Ⅲ



問 6

$-g\sin\theta$

解説

座標の原点は，台 A に固定されているから，

この座標系による小物体の加速度とは，台 A 上の観測者が観測した加速度である。

台 A 上の観測者が観測する小物体にはたらく外力は，

台 B からの垂直抗力 N と小物体の重力 mg である。

求める加速度を $a_{x'}$ とすると， x' 方向の運動方程式は，

$ma_{x'} = -mg\sin\theta + mg\cos 90° = -mg\sin\theta$

$\therefore a_{x'} = -g\sin\theta$

問 7

$\dfrac{2v_0}{g\sin\theta}$

解説

変位の x' 成分は， $\Delta x' = v_0 t + \dfrac{1}{2}\times(-g\sin\theta)t^2$

もとの位置に戻ってきたとき変位 $\Delta x' = 0$ となるから，

戻ってくるまでの時間を t' とすると， $0 = v_0 t' - \dfrac{1}{2}g\sin\theta\cdot t'^2$

$t' \neq 0$ より， $t' = \dfrac{2v_0}{g\sin\theta}$

問 8

$$\frac{n\pi g\sin\theta}{\omega}$$

解説

小物体が台 B を上り始めてからもとの位置に戻ってくるまでの時間 $\dfrac{2V}{g\sin\theta}$ が

台 B の単振動周期 T の整数倍であればよいから，$\dfrac{2V}{g\sin\theta}=nT$

$$\therefore V=\frac{ng\sin\theta}{2}T$$

$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ より，$V=\dfrac{n\pi g\sin\theta}{\omega}$

〔**2**〕

Ⅰ.

問 1

$\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$

解説

加速後の電位を 0 とすると加速前の電位は V （$V>0$）だから，

加速前の電子がもつ保存力（静電気力）の位置エネルギーは eV

加速前後において力学的エネルギーが保存されるから，

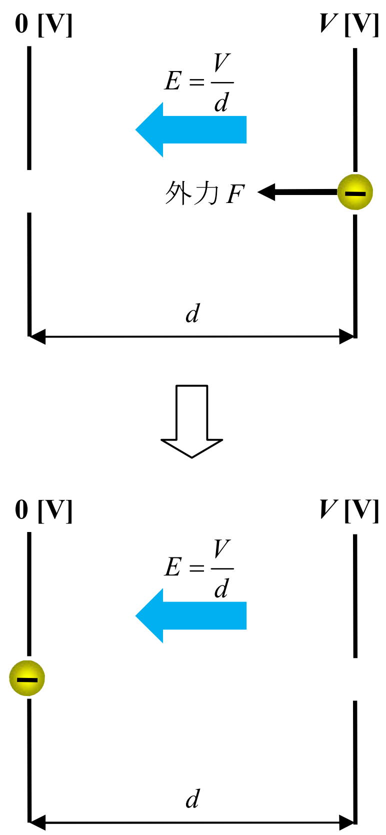
加速後の電子は速さを v とすると，

$$eV+0=0+\frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore v=\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

補足

加速前の電子がもつ保存力（静電気力）の位置エネルギー eV について



極板間の距離を d とすると，電界の大きさ $E=\dfrac{V}{d}$

電荷 $-e[\mathrm{C}]$ の電子を電位 $V[\mathrm{V}]$ の位置から電位 0[V]の位置まで移動させるとき，

必要とする外力の大きさ $F=\left|-eE\right|=\dfrac{eV}{d}$ である。

外力の向きと変位の向きのなす角が 0 だから，

外力がする仕事 $W=F\cdot d\cdot\cos 0=\dfrac{eV}{d}\cdot d\cdot 1=eV$

この仕事は電子がもつ保存力（静電気力）の位置エネルギーとして蓄えられる。

よって，加速前の電子がもつ保存力（静電気力）の位置エネルギーは eV である。

Ⅱ

問 2

時刻：$\dfrac{\pi m}{eB}$

x 座標：$-\dfrac{2mv}{eB}$

解説

磁界中で電子は向心力（ローレンツ力 evB ）を受け等速円運動をする。

円運動の半径を r とすると向心加速度 $a=\dfrac{v^2}{r}$ より，

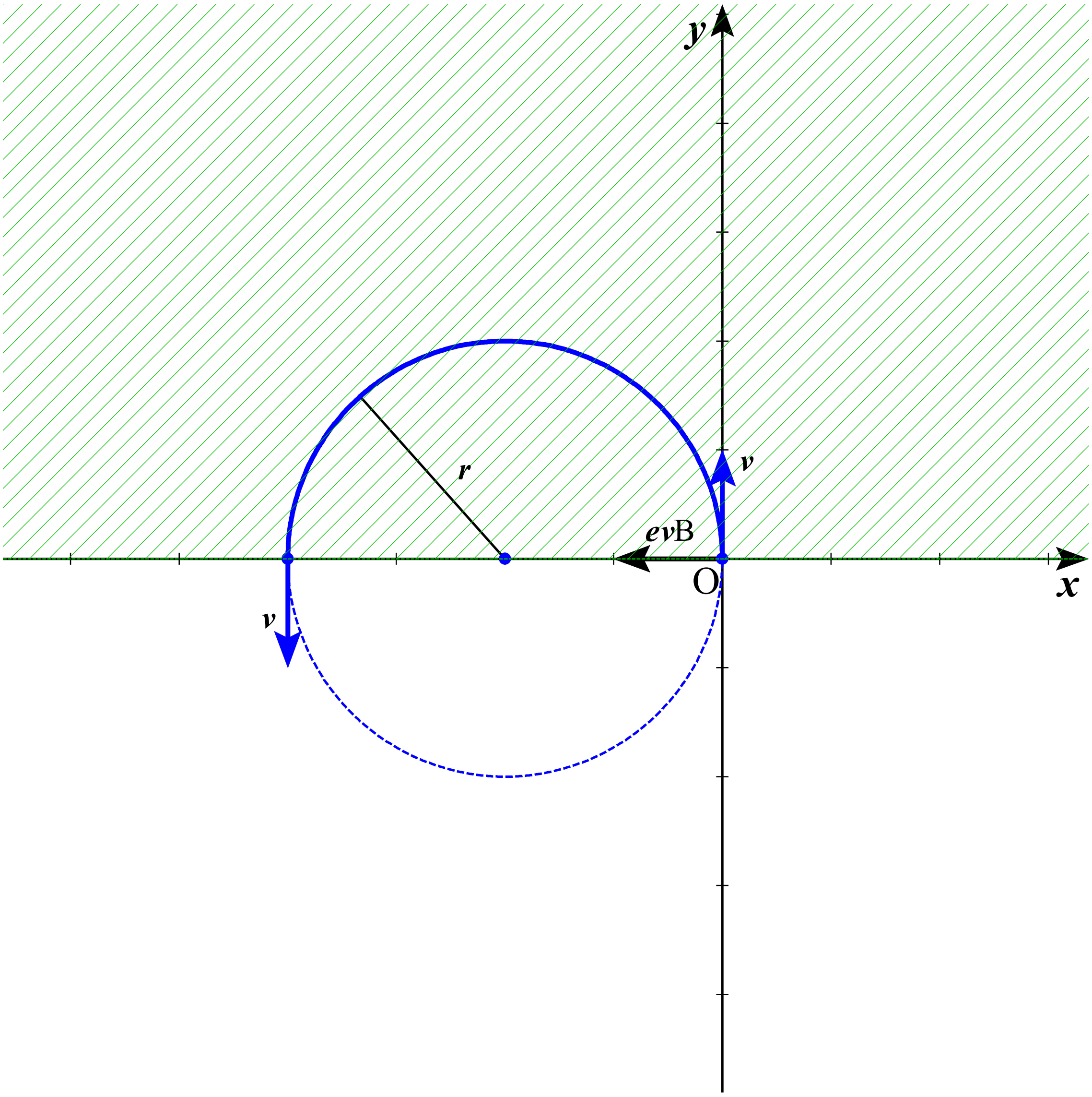
その運動方程式は，$m\dfrac{v^2}{r}=evB$　　$\therefore r=\dfrac{mv}{eB}$

荷電粒子は半円を描いた後磁界から飛び出すから，その軌道の長さは $r\pi$ である。

磁界に入射した時刻を 0 とするから，

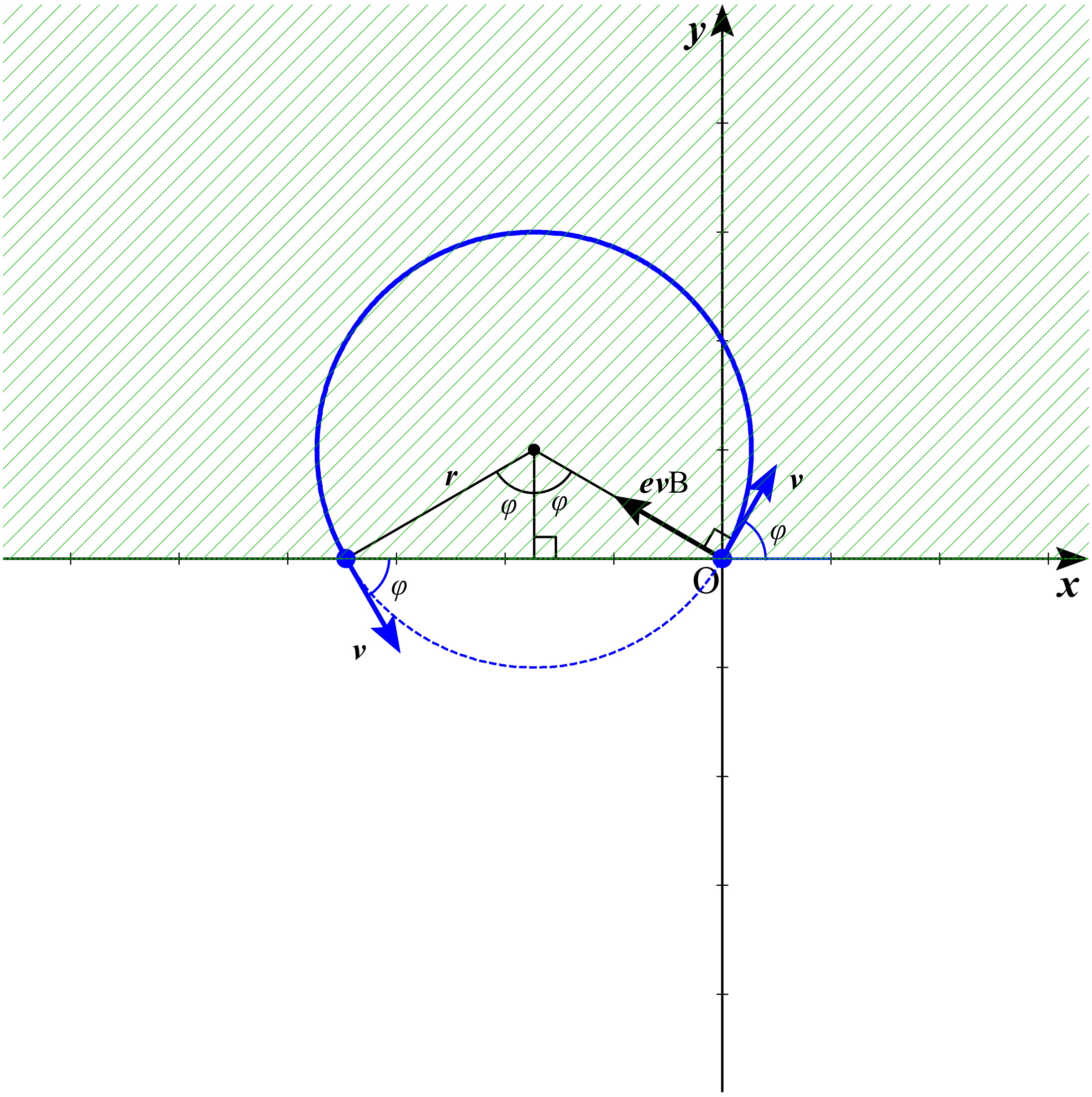
磁界から飛び出す時刻は，$\dfrac{r\pi}{v}=\dfrac{\dfrac{mv}{eB}\cdot\pi}{v}=\dfrac{\pi m}{eB}$

飛び出すときの x 座標は，$-2r=-\dfrac{2mv}{eB}$


y
v
r
evB
O
x
v

問 3

電子の軌跡



時刻：$\dfrac{2(\pi-\phi)m}{eB}$

x 座標：$-\dfrac{2mv\sin\phi}{eB}$

解説

電子が描く円弧の長さ＝$r(2\pi-2\phi)=2r(\pi-\phi)$ より，

電子が飛び出す時刻＝$\dfrac{2r(\pi-\phi)}{v}=\dfrac{\dfrac{2mv}{eB}\cdot(\pi-\phi)}{v}=\dfrac{2(\pi-\phi)m}{eB}$

また，x 座標＝$-2r\sin\phi=-\dfrac{2mv\sin\phi}{eB}$

Ⅲ

問 4

電子の運動：z 軸正方向に等速直線運動をする。

理由：電子の運動方向と磁場の向きが平行だから，電子は磁場から力を受けない。

問 5

半径：$\dfrac{mv_0 \sin\theta}{eB}$

周期：$\dfrac{2\pi m}{eB}$

解説

図 3 より，電子の磁場の向きと垂直な速度成分は $v_0 \sin\theta$

よって，電子が受けるローレンツ力の大きさは $ev_0 \sin\theta \cdot B$

これが向心力となって，z 軸方向からみたときは等速円運動をする。

この等速円運動の半径を r とすると，

等速円運動の運動方程式は，$\dfrac{m(v_0 \sin\theta)^2}{r} = ev_0 \sin\theta \cdot B$

$$\therefore r = \frac{mv_0 \sin\theta}{eB}$$

また，周期は，

$$\frac{r \cdot 2\pi}{v_0 \sin\theta} = \frac{mv_0 \sin\theta}{eB} \cdot \frac{2\pi}{v_0 \sin\theta} = \frac{2\pi m}{eB}$$

問 6

$$\frac{2\pi m v_0 \cos\theta}{eB}$$

解説

等速度運動の速度成分は，$v_0 \cos\theta$ だから，これに等速円運動の周期をかければよい。

よって，$L = v_0 \cos\theta \times \dfrac{2\pi m}{eB} = \dfrac{2\pi m v_0 \cos\theta}{eB}$

問 7

$$\frac{3}{2}$$

解説

等速円運動の周期 $T = \dfrac{2\pi m}{eB}$ より，電子の速さが変わっても一定である。

電子の速さが v_0 のとき，電子は等速円運動をちょうど 3 回行なって位置 $(0,0,3L)$ に達する。。

よって,

$v_0 \cos\theta \cdot 3T = 3L$　・・・①

速さを v_0 から大きくしていくと,

z 軸方向の速さが大きくなるので,

電子が $z=3L$ に達するまでの等速円運動の回数が減少していく。

したがって，次に電子が位置 $(0,0,3L)$ にある検出器に検出されるとき,

等速円運動をちょうど 2 回行うことになる。

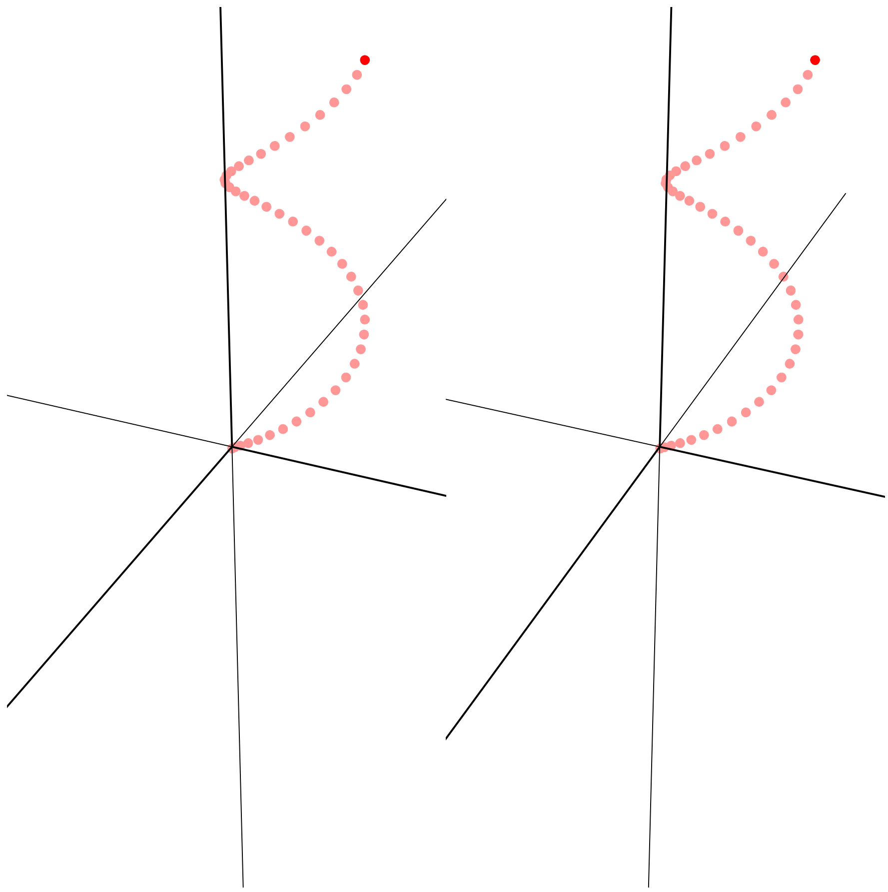
このときの速さを v_0' とすると,

$v_0' \cos\theta \cdot 2T = 3L$　・・・②

$\dfrac{②}{①}$ より, $\dfrac{v_0' \cos\theta \cdot 2T}{v_0 \cos\theta \cdot 3T} = \dfrac{3L}{3L}$

$\therefore v_0' = \dfrac{3}{2} v_0$

おまけ



Ⅳ

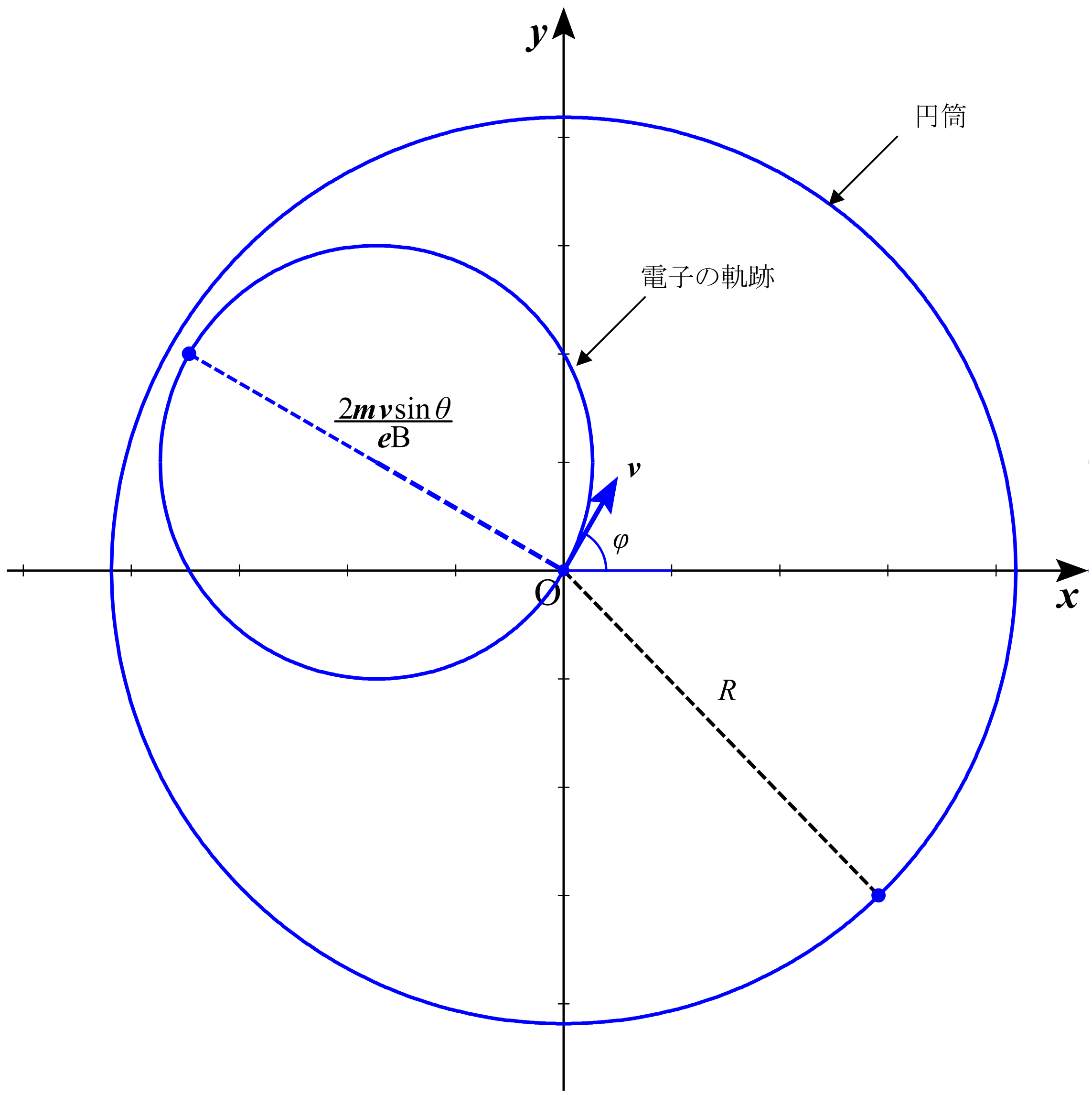
問 8

$$v < \frac{eBR}{2m\sin\theta}$$

解説

$$\text{回転半径}\times 2 = \frac{mv\sin\theta}{eB}\times 2 < R$$ であればよい。

$$\therefore v < \frac{eBR}{2m\sin\theta}$$



問 9

$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

解説

検出器の座標 $(0,0,\pi R)$ より，$\theta \neq 0$ のとき電子が検出されるためには，
以下の 3 つの条件が満たされなければならない。

・z 軸正方向に進むためには $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であること。

・電子が検出されるためには等速円運動を少なくとも 1 回しなければならないから，
軌道半径×2＜ 円筒の半径であること。

・電子が検出器に達したとき等速円運動の回数がちょうど n 回（n は自然数）であること。

軌道半径×2＜ 円筒の半径

$$\frac{mv\sin\theta}{eB}\times 2<R,\quad R=\frac{4\sqrt{2}mv}{3eB}\ \text{より，}\ \frac{mv\sin\theta}{eB}\times 2<\frac{4\sqrt{2}mv}{3eB}$$

$$\therefore \sin\theta<\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\quad \cdot\cdot\cdot ③$$

電子が検出器に達したとき等速円運動の回数がちょうど n 回

z 方向の速さが $v\cos\theta$ だから，$v\cos\theta\cdot nT=\pi R$

$$R=\frac{4\sqrt{2}mv}{3eB},\quad T=\frac{2\pi m}{eB}\ \text{より，}\ v\cos\theta\cdot n\cdot\frac{2\pi m}{eB}=\pi\cdot\frac{4\sqrt{2}mv}{3eB}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3n}\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\quad \cdot\cdot\cdot ④$$

あるいは，

問 6 より，電子が等速円運動を 1 回したとき，電子は座標 $(0,0,L)$ に達するから，
$(0,0,\pi R)=(0,0,nL)$ が成り立てばよい。

よって，$\pi\times\dfrac{4\sqrt{2}mv}{3eB}=n\times\dfrac{2\pi mv\cos\theta}{eB}$ $\qquad \therefore \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3n}$ $\quad\cdot\cdot\cdot ④$

③，④より，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3n}\right)^2}<\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore 1-\frac{8}{9n^2}<\frac{8}{9}$$

$$\therefore n^2<8$$

n は自然数だから，$n=1$，2 $\qquad \therefore \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

〔3〕

まず，各状態量を(P,V,n,T)の形で成分表示しておく。

初期状態

左室$\left(P_0,V_2,\dfrac{P_0V_2}{RT_0},T_0\right)$　　右室$\left(P_0,V_1,\dfrac{P_0V_1}{RT_0},T_0\right)$

解説

気体の物質量は，理想気体の状態方程式より求めた。

状態 1

左室$\left(P_0,V_1,\dfrac{P_0V_1}{RT_0},T_0\right)$　　右室$\left(P_{\mathrm{R1}},V_2,\dfrac{P_0V_1}{RT_0},T_0\right)$

解説

左室：導入弁が開くから，左室の圧力はP_0である。よって，気体の物質量は$\dfrac{P_0V_1}{RT_0}$

右室：密閉状態だから気体の物質量は変化しない。また，圧力をP_{R1}とおいた。

状態 2

全体の状態$\left(P_2,V_1+V_2,\dfrac{2P_0V_1}{RT_0},T_0\right)$

左室$\left(P_2,V_1,\dfrac{2P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{V_1}{V_1+V_2},T_0\right)$　　右室$\left(P_2,V_2,\dfrac{2P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{V_2}{V_1+V_2},T_0\right)$

解説

接続バルブが解法されるから，1 つの系になったと見なしてよく，

このとき気体の物質量は$\dfrac{P_0V_1}{RT_0}+\dfrac{P_0V_1}{RT_0}=\dfrac{2P_0V_1}{RT_0}$

また，圧力をP_2とした。

左室・右室で成分表示する場合，

左室と右室の気体の物質量比＝左室と右室の体積比$=V_1:V_2$より，

左室の気体の物質量$=\dfrac{2P_0V_0}{RT_0}\cdot\dfrac{V_1}{V_1+V_2}$

右室の気体の物質量$=\dfrac{2P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{V_2}{V_1+V_2}$

状態 3

左室$\left(P_{L3}, V_2, \dfrac{2P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{V_1}{V_1+V_2}, T_0\right)$　　右室$\left(P_0, V_1, \dfrac{P_0V_1}{RT_0}, T_0\right)$

解説

左室：密閉状態だから気体の物質量は変化しない。また，圧力を P_{L3} とした。

右室：導入弁が開くから，圧力は P_0 になる。よって，気体の物質量は $\dfrac{P_0V_1}{RT_0}$

状態 4

全体の状態$\left(P_4, V_2, \dfrac{P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{3V_1+V_2}{V_1+V_2}, T_0\right)$

左室$\left(P_4, V_2, \dfrac{P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{3V_1+V_2}{V_1+V_2}\cdot\dfrac{V_2}{V_1+V_2}, T_0\right)$

右室$\left(P_4, V_1, \dfrac{P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{3V_1+V_2}{V_1+V_2}\cdot\dfrac{V_1}{V_1+V_2}, T_0\right)$

解説

接続バルブが解法されるから，1 つの系になったと見なしてよく，

このとき気体の物質量は$\dfrac{2P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{V_1}{V_1+V_2}+\dfrac{P_0V_1}{RT_0}=\dfrac{P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{3V_1+V_2}{V_1+V_2}$

また，圧力を P_4 とした。

左室・右室で成分表示する場合，

左室と右室の気体の物質量比＝左室と右室の体積比$=V_2:V_1$ より，

左室の気体の物質量$=\dfrac{P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{3V_1+V_2}{V_1+V_2}\cdot\dfrac{V_2}{V_1+V_2}$

右室の気体の物質量$=\dfrac{P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{3V_1+V_2}{V_1+V_2}\cdot\dfrac{V_1}{V_1+V_2}$

状態 5

左室$\left(P_0, V_1, \dfrac{RT_0}{P_0V_1}, T_0\right)$

右室$\left(P_{R5}, V_2, \dfrac{P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{3V_1+V_2}{V_1+V_2}\cdot\dfrac{V_1}{V_1+V_2}, T_0\right)$

解説

左室：導入弁が開くから，圧力は P_0 になる。よって，気体の物質量は $\dfrac{P_0V_1}{RT_0}$

右室：密閉状態だから気体の物質量は変化しない。また，圧力を P_{R5} とした。

問 1

$$\frac{P_0V_1}{RT_0}$$

解説

右室の気体の状態方程式 $P_0V_1 = n_0RT_0$ より， $n_0 = \dfrac{P_0V_1}{RT_0}$

問 2

$$\frac{2a}{a+1}P_0$$

解説

全体の状態 $\left(P_2, V_1+V_2, \dfrac{2P_0V_1}{RT_0}, T_0\right)$ より， $P_2(V_1+V_2) = \dfrac{2P_0V_1}{RT_0}\cdot RT_0$

$$\begin{aligned}\therefore P_2 &= \frac{2P_0V_1}{V_1+V_2}\\ &= \frac{2P_0\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{V_1}{V_2}+1}\\ &= \frac{2a}{a+1}P_0\end{aligned}$$

問 3

$$\frac{3(a-1)}{2(a+1)}P_0V_1$$

解説

状態 1 の左室の内部エネルギーを U_{L1} とすると， $\left(P_0, V_1, \dfrac{P_0V_1}{RT_0}, T_0\right)$ より，

$$U_{\mathrm{L1}} = \frac{P_0V_1}{RT_0}\cdot\frac{3}{2}RT_0 = \frac{3}{2}P_0V_1$$

状態 2 の左室の内部エネルギーを U_{L2} とすると， $\left(P_2, V_1, \dfrac{2P_0V_1}{RT_0}\cdot\dfrac{V_1}{V_1+V_2}, T_0\right)$ より，

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{L2}} &= \frac{2P_0V_1}{RT_0}\cdot\frac{V_1}{V_1+V_2}\cdot\frac{3}{2}\cdot RT_0\\ &= 3P_0V_1\cdot\frac{V_1}{V_1+V_2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore U_{\mathrm{L}2} - U_{\mathrm{L}1} &= 3P_0V_1 \cdot \frac{V_1}{V_1+V_2} - \frac{3}{2}P_0V_1 \\
&= P_0V_1\left(\frac{3V_1}{V_1+V_2} - \frac{3}{2}\right) \\
&= P_0V_1 \cdot \frac{3(V_1-V_2)}{2(V_1+V_2)} \\
&= P_0V_1 \cdot \frac{3\left(\dfrac{V_1}{V_2}-1\right)}{2\left(\dfrac{V_1}{V_2}+1\right)} \\
&= P_0V_1 \cdot \frac{3(a-1)}{2(a+1)} \\
&= \frac{3(a-1)}{2(a+1)}P_0V_1
\end{aligned}
$$

問 4

$$\frac{2a}{a+1}$$

解説

右室の状態が状態 2 から状態 3 に移る過程において，

気体が導入され始める瞬間までの過程

温度一定の閉じた系における状態変化だから，等温変化である。

よって，$PV =$ 一定（等温変化）が成り立つ。

気体が導入される始める瞬間の右室の圧力は P_0 であり，

このときの体積を kV_2 とすると，

ピストンを動かす前と気体が導入される始める瞬間において，

$PV =$ 一定より，

$$P_2V_2 = P_0 \cdot kV_2$$

$$\therefore k = \frac{P_2}{P_0}$$

問 2 より $P_2 = \dfrac{2a}{a+1}P_0$ だから，$k = \dfrac{2a}{a+1}$

気体が導入され始めてから状態 3 までの過程

圧力 P_0 で変化するから，等圧変化である。

問 5

$$\frac{a-1}{a+1}P_0V_1$$

解説

圧力 P_0 がする仕事により体積が kV_2 から V_1 に変化する。

$k=\dfrac{2a}{a+1}$，$\dfrac{V_1}{V_2}=a$ より，$kV_2=\dfrac{2a}{a+1}\cdot\dfrac{V_1}{a}=\dfrac{2}{a+1}V_1$

$$\therefore W=P_0\Delta V=P_0\left(V_1-\frac{2}{a+1}V_1\right)=\frac{a-1}{a+1}P_0V_1$$

問 6

初期状態から状態 1 への変化

等温変化（$PV=$ 一定）により，(P_0,V_1) から $\left(aP_0,\dfrac{V_1}{a}\right)$ に変化

状態 1 から状態 2 への変化

等積変化により，$\left(aP_0,\dfrac{V_1}{a}\right)$ から $\left(\dfrac{2a}{a+1}P_0,\dfrac{V_1}{a}\right)$ に変化

状態 2 から状態 3 への変化

気体が導入されはじめるまで

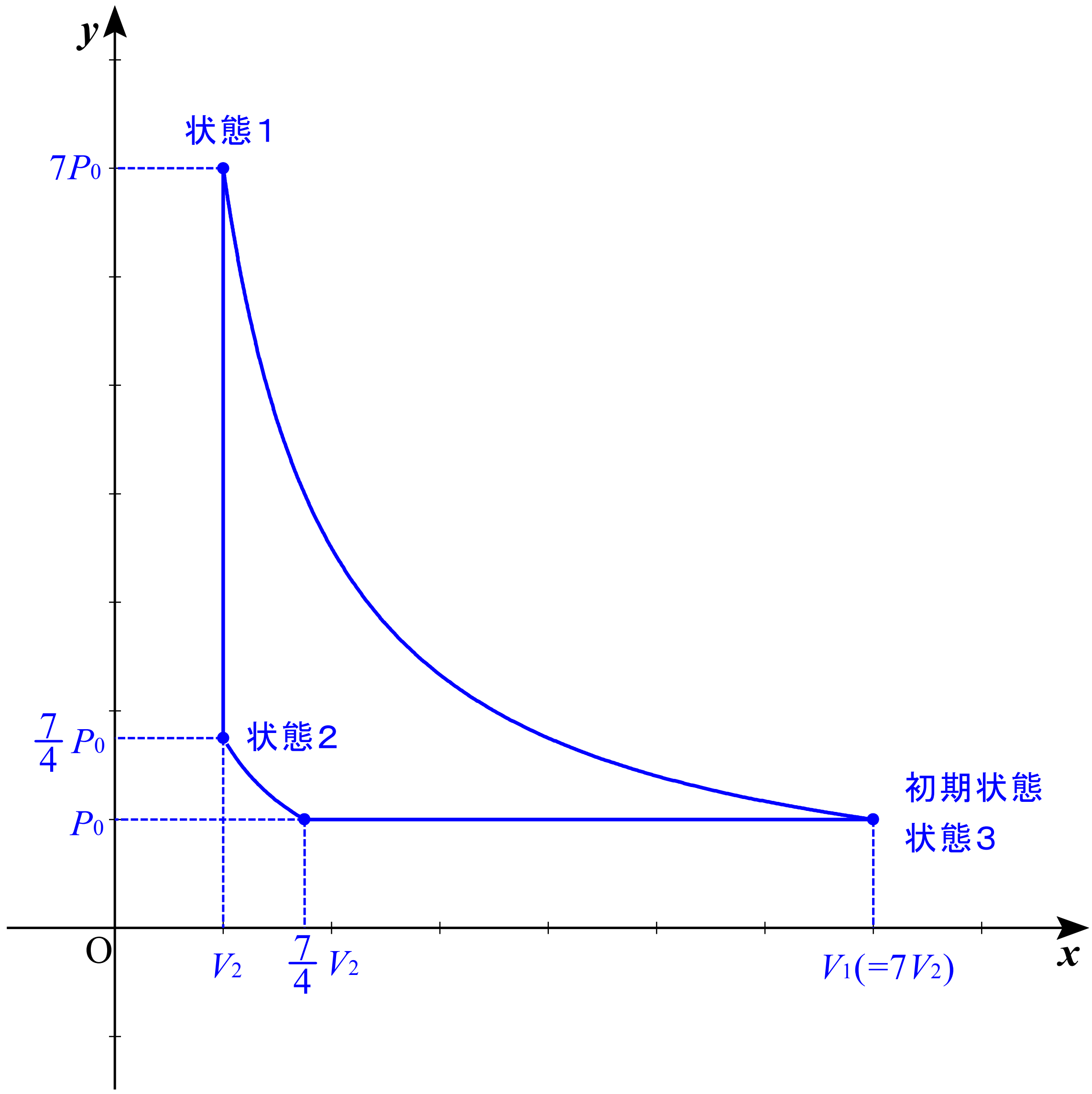
等温変化（$PV=$ 一定）により，$\left(\dfrac{2a}{a+1}P_0,\dfrac{V_1}{a}\right)$ から $\left(P_0,\dfrac{2}{a+1}V_1\right)$ に変化

気体が導入されてから

等圧変化により，$\left(P_0,\dfrac{2}{a+1}V_1\right)$ から (P_0,V_1) に変化

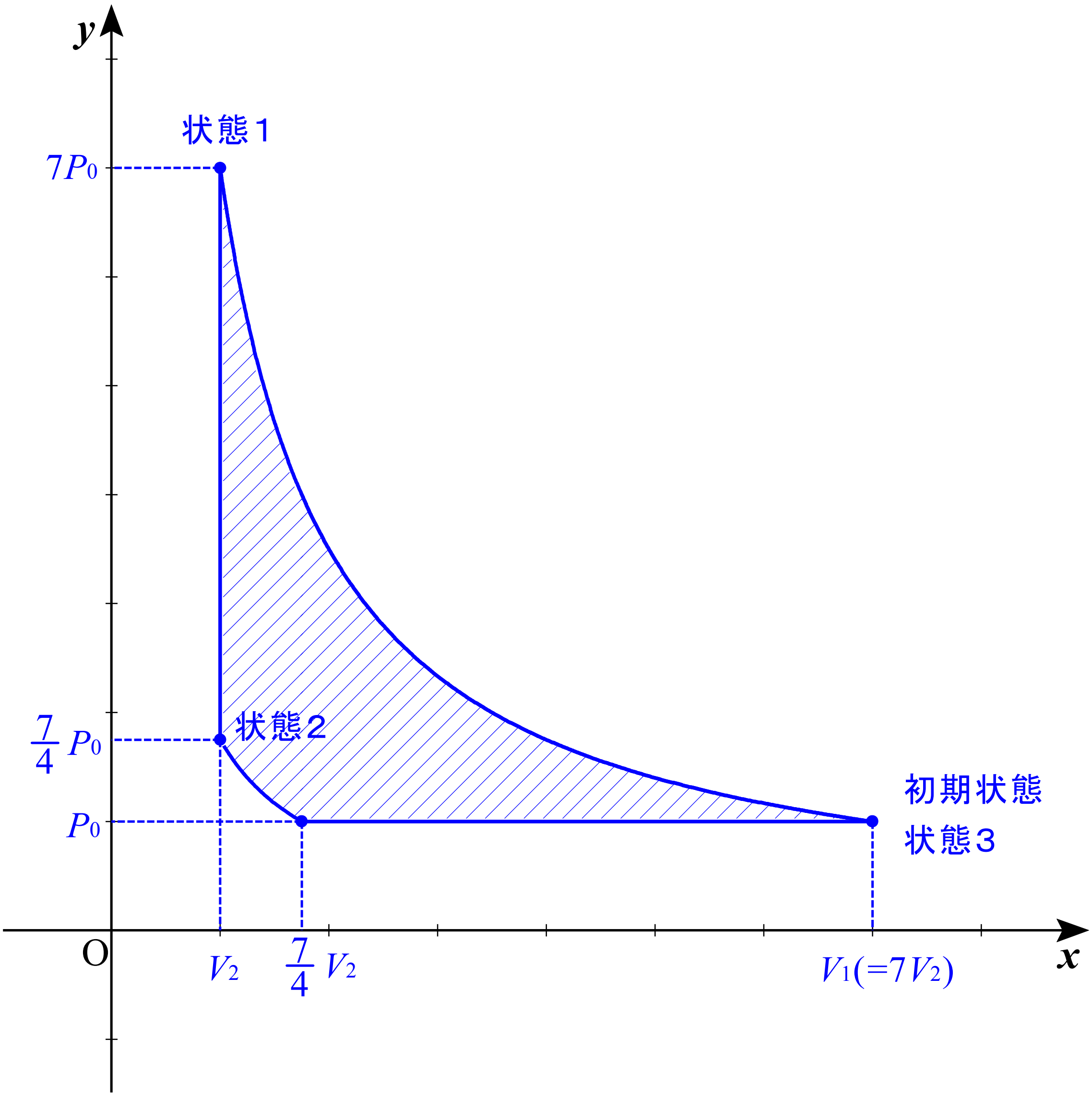
以上と $a=7$ より，

グラフは次図のようになる。



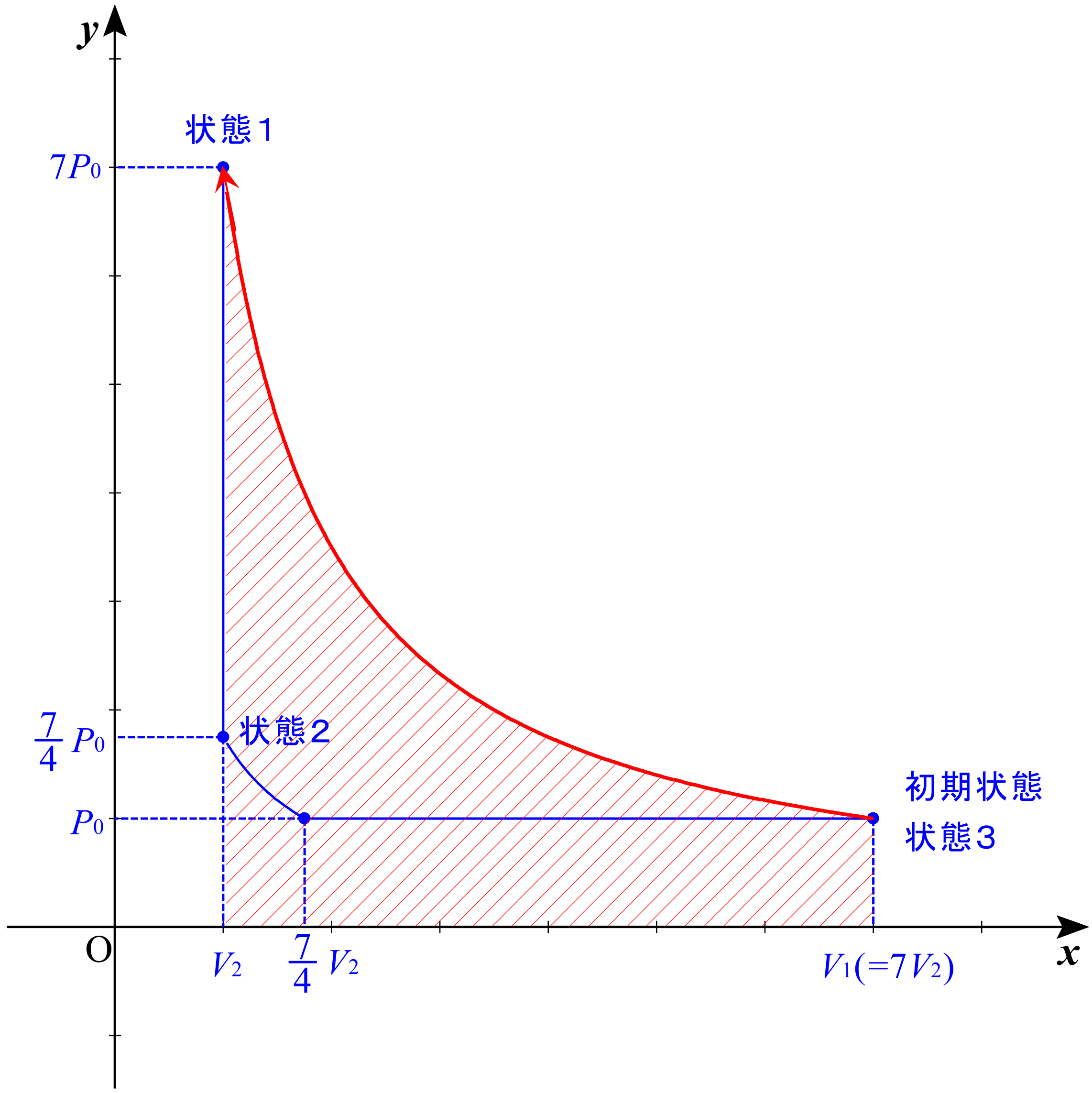
y
状態１
7P0
7/4 P0
状態２
P0
初期状態
状態３
O
V2
7/4 V2
V1(=7V2)
x

問 7

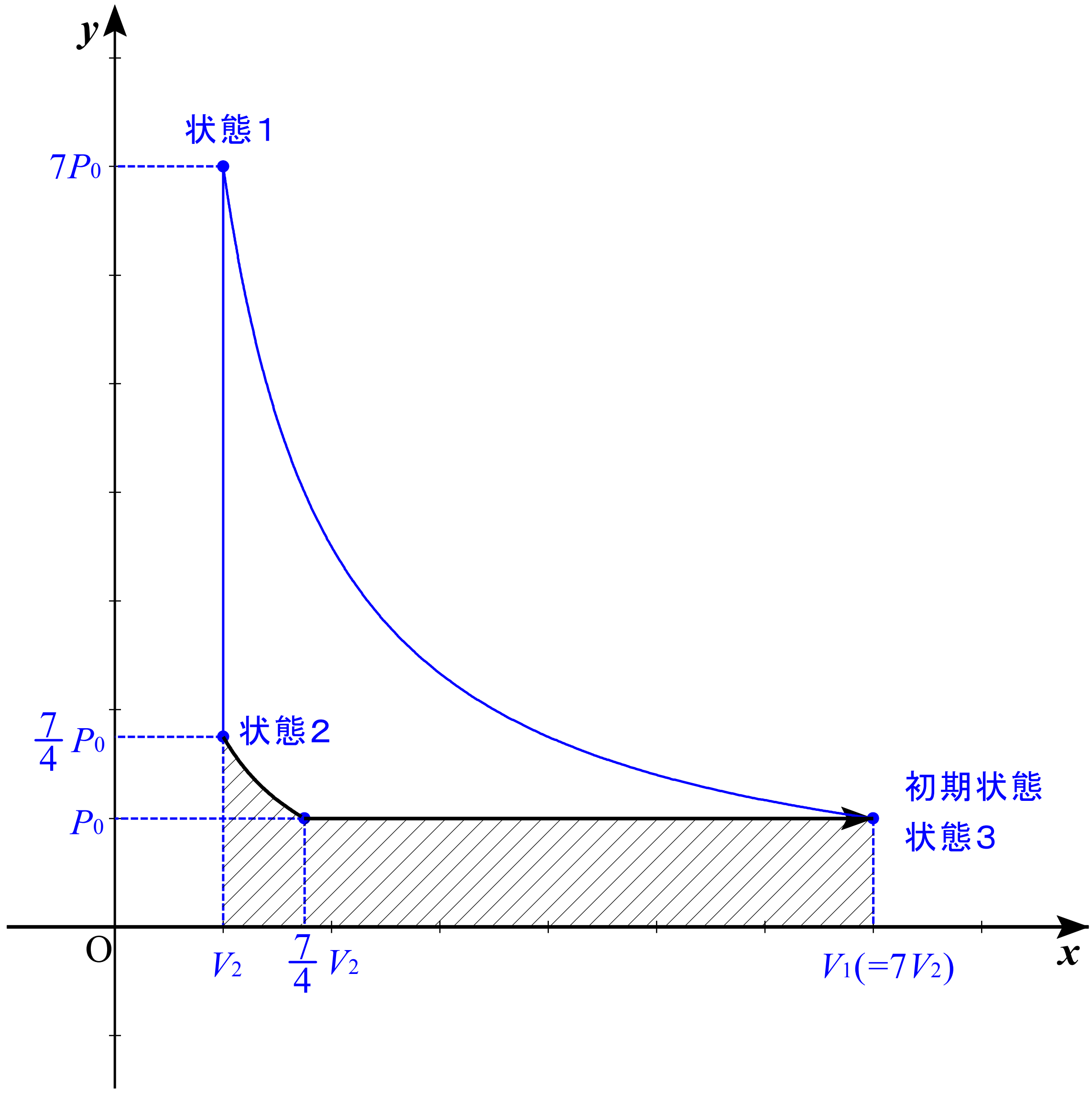


解説

初期状態から状態 1 に至る過程で右室の気体がピストンから受けた仕事



状態 **2** から状態 **3** に至る過程で右室の気体がピストンにした仕事



問 8

$49P_0$

解説

状態 k における体積 V_2 の室の圧力と気体の物質量をそれぞれ P_k，n_k とする。

状態 $2k-1$ のとき

体積 V_1 の室の状態は，常に (P_0, V_1, n_0)

体積 V_2 の室の状態は $(P_{2k-1}, V_2, n_{2k-1})$

それぞれの状態方程式は，

$P_0V_1 = n_0RT_0$ ・・・①

$P_{2k-1}V_2 = n_{2k-1}RT_0$ ・・・②

状態 $2k$ のとき

接続バルブを開放することによって，状態 $2k$ になるから，

1 つの系と見なしたときの状態は，$(P_{2k}, V_1 + V_2, n_0 + n_{2k-1})$

このときの状態方程式 $P_{2k}(V_1 + V_2) = (n_0 + n_{2k-1})RT_0$ および①，②より，

$P_{2k}(V_1 + V_2) = (n_0 + n_{2k-1})RT_0 = n_0RT_0 + n_{2k-1}RT_0 = P_0V_1 + P_{2k-1}V_2$

$$\therefore P_{2k} = \frac{P_0V_1 + P_{2k-1}V_2}{V_1 + V_2} = \frac{aP_0 + P_{2k-1}}{a+1} = \frac{7P_0 + P_{2k-1}}{8}$$

これと $a = 7$ より，$P_{2k} = \dfrac{7P_0 + P_{2k-1}}{8}$ ・・・③

状態 $2k+1$ のとき

状態 $2k$ から状態 $2k+1$ までの変化は等温変化だから，

$P_{2k+1}V_2 = P_{2k}V_1$

$$\therefore P_{2k+1} = \frac{V_1}{V_2}P_{2k} = aP_{2k} = 7P_{2k} \quad ・・・④$$

③，④より，$P_{2k+1} = \dfrac{49P_0 + 7P_{2k-1}}{8}$ ・・・⑤

「上限値がある」とあるから，上限値を $P_{\max}$ とすると，

$\lim_{k\to\infty} P_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} P_{2k+1} = P_{\max}$ が成り立つ。

よって，⑤の両辺について極限をとると，

$\lim_{k\to\infty} P_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(\dfrac{49P_0 + 7P_{2k-1}}{8}\right)$ より，$P_{\max} = \dfrac{49P_0 + 7P_{\max}}{8}$

$\therefore P_{\max} = 49P_0$